# 3.1 函数极限

2023年10月12日 星期四 14:20

## 函数极限的定义

定义: 设函数f在点$x_0$的去心邻域

$O^*(x_0,\delta_0)=O(x_0,\delta_0)\setminus\{x_0\}$

$=(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\setminus\{x_0\}$

内有定义, $A\in\mathbb{R}$

称f在点$x_0$的极限为A, 如果

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ (与$x_0$处有没有定义没关系)

此时也记作 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$, $x\to x_0$

如果 $\forall A\in\mathbb{R}$, 有当 $x\to x_0$, $f(x)\not\to A$

则称f在点$x_0$处没有极限.

即: $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in O^*(x_0-\delta)$, 使

$|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$

例1: 证明对于$a>1$, 有 $\lim_{x\to0}a^x=1$

分析: 借助 $\lim_{n\to\infty}a^{\frac1n}=1$, $\lim_{n\to\infty}a^{-\frac1n}=1$

以及 $f(x)=a^x$在R上的严格单增. (*)

证明: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+$, 使 $a^{\frac1N}<1+\varepsilon$, $a^{-\frac1N}>1-\varepsilon$

取 $\delta=\frac1N$, 当 $0<|x|<\frac1N$, 有 $-\frac1N<x<\frac1N$, 从而由(*)

$1-\varepsilon<a^{-\frac1N}<a^x<a^{\frac1N}<1+\varepsilon\Rightarrow|a^x-1|<\varepsilon$

从而 $\lim_{x\to0}a^x=1$

例2: 证明: $\lim_{x\to2}x^2=4$ 　当$|x-2|<1$时

分析: $|x^2-4|=|x-2||x+2|\le5\cdot|x-2|$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{5},1\}$

则当 $0<|x-2|<1$ 时有

$|x^2-4|\le5|x-2|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon$

例3: 证明: $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

分析: $|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$

$\le2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|$, 取$\delta=\varepsilon$即可

(性质: 当$x>0$时, $\sin x<x<\tan x$ (几何证法))

在函数极限的定义中, 注意.

(1) $\varepsilon$的任意性及$\delta$的相应性 ($\delta(\varepsilon)$)

(2) 函数f在点$x_0$的极限与f在点$x_0$是否有定义无关, 也与f在点$x_0$的具体取值无关

(3) $\varepsilon-\delta$定义可改为

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $x\in O^*(x_0,\delta)$时, 有 $f(x)\in O(A,\varepsilon)$

## 函数极限的性质

(1) 极限的唯一性. 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)$存在, 则此极限是唯一的

(2) 局部保序性, 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$　$\lim_{x\to x_0}g(x)=B$

且$A>B$, 则$\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$时, 有 $f(x)>g(x)$

必推论: (保号性) (1) 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A>0$

则$\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 有 $f(x)>\frac A2>0$

(2) 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\ne0$

则$\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时, 有 $|f(x)|>\frac{A}{2}$

(保不等式性) 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$　$\lim_{x\to x_0}g(x)=B$

且$\exists\delta_0>0$, 有 $\underset{(>)}{f(x)\ge g(x)}\longrightarrow\underset{(\ge)}{A\ge B}$ ☆

(3) (局部有界性) 若函数f在$O^*(x_0,\delta_0)$内有定义

且 $\lim_{x\to x_0}f(x)$存在, 则$\exists\ 0<\delta<\delta_0$, 使f在$O^*(x_0,\delta)$内有界.

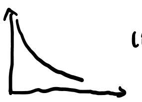
证: 令 $A=\lim_{x\to x_0}f(x)$, 取$\varepsilon=1$, 由定义, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$时

有 $|f(x)-A|<1$, 从而当 $x\in O^*(x_0,\delta)$时

$|f(x)|<|A|+1$

注: f在$(a,b)$上的任一点, 都存在极限,

$\not\Rightarrow$ f在$(a,b)$上有界. 改为[ ] ✓

例:  $(0,1)$

(4) 迫敛性(夹逼性质)

设存在$\delta_0>0$, 使$\forall x\in O^*(x_0,\delta_0)$有 $f(x)\le g(x)\le h(x)$

且 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A$.

则 $\lim_{x\to x_0}g(x)=A$.

## 四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ (△)

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

(3) 当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

线性性：在条件(△)下，$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha A+\beta B$

例：证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

注意到 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin x<x<\tan x$

从而 $\cos x=\dfrac{\sin x}{\tan x}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 由 $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$

可得 $\cos x=\cos(-x)<\dfrac{\sin x}{x}<1$

于是 $\forall x\in O^*(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

利用迫敛性，可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

## 复合函数求极限的性质

※ 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ —定要注意函数极限是在空心邻域下

问：是否必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$? ×

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 且 $\exists\delta_0>0$，使 $x\in O^*(x_0,\delta_0)$ 时有 $g(x)\neq u_0$ (2)

又设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$. (1) 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$

证：由(1)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$. 当 $u\in O^*(u_0,\eta)$ 时，

有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

由(2)，对上述给定的 $\eta$，$\exists\, 0<\delta<\delta_0$，当 $x\in O^*(x_0,\delta)$ 时，

有 $|g(x)-u_0|<\eta$

又由条件，当 $x\in O^*(x_0,\delta)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$ 关键要去心.

从而此时，有 $g(x)\in O^*(u_0,\eta)$

所以有 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$

## 海涅(Heine)归结原则

数列极限 $\Rightarrow$ 函数极限

设函数 $f$ 在 $O^*(x_0,\delta_0)$ 有定义.

则以下两个命题等价：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

(2) 对任意包含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内以 $x_0$ 为极限的数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

证：(1) → (2)

$\forall\varepsilon>0$，由(1)成立，$\exists\delta>0$，当 $x\in O^*(x_0,\delta)$，有

$|f(x)-A|<\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. 对上述 $\delta$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，当 $n>N$ 时，

$|x_n-x_0|<\delta$

又 $\{x_n\}\subset O^*(x_0,\delta_0)$ 所以 $\forall n\geq 1$，有 $x_n\neq x_0$

要去心!

故当 $n>N$ 时 $x_n\in O^*(x_0,\delta)$

从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

(2) → (1) 用反证法，假设(1)不成立

则：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x\in O^*(x_0,\delta)$

使 $|f(x)-A|\geq\varepsilon_0$

从而，令 $\delta_n=\frac{\delta_0}{n}$，$n=1,2,\cdots$

$\exists\, x_n\in O^*(x_0,\delta_n)$ 使

$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$ (*)

从而，有 $|x_n-x_0|<\frac{\delta_0}{n}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$

又由 $x_n\neq x_0$，故 $\{x_n\}$ 是满足条件(2)的数列.

但由(*)，当 $n\to\infty$ 时，$f(x_n)\not\to A$，矛盾!

## 函数极限的柯西收敛准则

(可理解为原柯西收敛准则的 $\varepsilon$-$\delta$ 版本，数列→也是一种函数)

设函数 $f$ 在 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内有定义

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in O^*(x_0,\delta)$

有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

($\Rightarrow$) 显然

($\Leftarrow$) 证：(借助 Heine 定理)

任意取定一列包含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 且以 $x_0$ 为极限的数列 $\{x_n\}$

由条件 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in O^*(x_0,\delta)$ 时，有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，对上述给定的 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$

当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$

又由 $x_n\in O^*(x_0,\delta_0)$ 去心，故当 $n>N$ 时，有

$x_n\in O^*(x_0,\delta)$

因此，当 $n,m>N$ 时，有

$x_n,x_m\in O^*(x_0,\delta)$

从而 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

故 $\{f(x_n)\}$ 为柯西序列，从而收敛，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

(海涅定理) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

?：有极限 $\xRightarrow{\text{Heine}}$ 推 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$

收敛 $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$ 满足基本数列

$m,n>N$ 时 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

注：①若存在含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内且以 $x_0$ 为极限的两个数列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$，使得 $\{f(x_n')\}$ 与 $\{f(x_n'')\}$ 都有极限但是不相等，则 $f$ 在点 $x_0$ 处没有极限。

（若存在含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内且以 $x_0$ 为极限的数列 $\{x_n\}$，使 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $f$ 在点 $x_0$ 处无极限）

证明没有极限！

② 可以由函数极限求出相应数列的极限.

③ 设函数 $f$ 在 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内有定义，则

(1') $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$ 则对任意包含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内且以 $x_0$ 为极限的数列 $\{x_n\}$，有 $\{f(x_n)\}$ 收敛

只需说明都收敛

则可说明极限存在

(3) ⇒ (1) 只要证：$\exists A\in\mathbb{R}$，使得(2)成立

反证法：假设这样的 $A$ 不成立

则存在含于 $O^*(x_0,\delta_0)$ 内且以 $x_0$ 为极限的两个数列，$\{x_n'\}$ $\{x_n''\}$，使得 $\{f(x_n')\}$ 与 $\{f(x_n'')\}$ 都有极限但不等

定义数列 $\{x_n\}$ 如下

$$\begin{cases} x_{2n-1} = x_n' \\ x_{2n} = x_n'' \end{cases}$$

则 $\{x_n\}$ 含于 $O^*(x_0,\delta_0)$，且以 $x_0$ 为极限.

但是由于 $\{f(x_n)\}$ 的两个子列 $\{f(x_{2n-1})\}$ 与 $\{f(x_{2n})\}$ 收敛于不同极限，故 $\{f(x_n)\}$ 不收敛 .

故条件(3)矛盾！

找 $x_n, x_m \in O(x_0,\delta)$

为什么能找到 $x\to x_0$

我要证明任意以 $x_0$ 为极限的数列极限为 $A$

## 单侧极限

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

定义：设函数 $f$ 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，$A\in\mathbb{R}$，取 $f$ 在点 $x_0$ 处有极限 $A$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

（同理可得左极限定义）

可记 $O_+^*(x_0,\delta_0)=(x_0, x_0+\delta_0)$

$O_-^*(x_0,\delta_0)=(x_0-\delta_0, x_0)$

性质：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$

## 函数极限的扩充

* $x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$

$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$

* $f(x)\to A$ $(A\in\mathbb{R})$

$f(x)\to+\infty$，$f(x)\to-\infty$ $f(x)\to\infty$

注：(1) 对于四则运算法则，只要不是待定型，四则运算总成立

(2) 对于迫敛性，对于 $A$ 为有限数，$+\infty$，$-\infty$ 都成立.

对于 $A=\infty$ 不成立

(3) 对于不同的函数极限，对应有不同的海涅归结原则，以及不同的柯西收敛原则

# 3.2 连续函数

2023年10月19日 星期四 13:27

**连续函数**的定义：

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

则称函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续，也称 $x_0$ 是 $f$ 的连续点。

$\varepsilon$-$N$ 语言

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域 $x\in O(x_0,\delta)$ 内有定义，称 $f$ 在点 $x_0$ 连续，

如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

**左连续**

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个左邻域 $(x_0-\delta_0, x_0]$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)= f(x_0)$

则称 $f$ 在 $x_0$ 处左连续，也称 $x_0$ 是 $f$ 的左连续点。

$(O_-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0]$ $\quad O_-^*(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0)$

同理可定义 右连续

性质：

设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域内有定义，则 $f$ 点 $x_0$ 连续的

充要条件：$f$ 在点 $x_0$ 既是左连续的，又是右连续的

**(注意定义与性质的区分)**

定义：设函数 $f$ 在区间 $I$ 上的每一个点都连续，则称 $f$ 是 $I$ 上的连续函数。对于闭区间或半开半闭区间，函数在这些点处的连续性是指左连续或右连续。

$\varepsilon$-$\delta$ 表述

设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义，称 $f$ 在 $I$ 上是连续的

若：对 $\forall x_0\in I$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in O(x_0,\delta)\cap I$ 时，

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

例：指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的.

连续函数的性质及四则运算法则

$f$ 在 $x_0$ 点连续 $\Rightarrow$ $f$ 在 $x_0$ 点有极限

$\Rightarrow$ 局部有界性、局部保序性

局部保号性、保不等式，迫敛性

由归结原则 + 数列极限的性质

$\Rightarrow$ (大部分) 函数极限的性质

四则运算法则，设 $f$ 与 $g$ 都在点 $x_0$ 连续

则 $f\pm g$，$f\cdot g$ 都在 $x_0$ 处连续.

进一步，$g(x_0)\neq 0$ 时，$\frac{f}{g}$ 也在点 $x_0$ 处收敛.

多项式函数、有理函数，在定义域内任一点连续

## 反函数连续性定理（双射）

反函数存在定理　设函数 $y=f(x)$ 在其定义域内 $D_f$ 上是严格单增的（或严格单减）

则：(1) 存在它的反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$

(2) 函数 $f^{-1}$ 在 $R_f$ 上是严格单增的（或严格单减）

证：(1) 只要证 $f$ 是单射.

由 $f$ 在定义域上严格单调，可知 $f$ 是单射

(2) 任取 $y_1, y_2\in R_f$，且 $y_1<y_2$

令 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$，则 $y_1=f(x_1)$　$y_2=f(x_2)$

则此时必有以下之一发生.

$x_1<x_2$，$x_1=x_2$，$x_1>x_2$

若 $x_1>x_2$，则由 $f$ 严格单增，可得 $f(x_1)>f(x_2)$

即 $y_1>y_2$，与 $y_1<y_2$ 矛盾.

所以一定有 $x_1 < x_2$

反函数连续性定理．设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单增，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 是连续且严格单增．

分析：(1) $f([a,b])=[f(a),f(b)]$

从而由反函数存在定理，只需证

$x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上是连续的．

即证：$\forall y_0\in[f(a),f(b)]$，$f^{-1}$ 在 $y_0$ 处连续

仅讨论 $f(a)<y<f(b)$ 的情形

（$y_0=f(a)$ 或 $f(b)$ 类似可证）．

令 $x_0=f^{-1}(y_0)$　$\varepsilon_0=\min\{x_0-a,b-x_0\}$

则 $\varepsilon_0>0$

$\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$，则 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\in[a,b]$

令 $y_1=f(x_0-\varepsilon)$　$y_2=f(x_0+\varepsilon)$，可知 $y_1<y<y_2$

取 $\delta=\min\{y-y_1,y_2-y\}$，$\delta>0$

$\forall y\in O(y_0,\delta)$，则 $y_1\le y_0-\delta<y<y_0+\delta\le y_2$

从而由 $f^{-1}$ 严格单增，可得

$$x_0-\varepsilon=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)=x_0+\varepsilon$$

从而 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|f^{-1}(y)-x_0|<\varepsilon$．

于是 $f^{-1}$ 在点 $y_0$ 处连续

例：反三角函数在定义域上连续

例：对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续的

☆ 复合函数求极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$，函数 $f$ 在点 $a$ 处连续.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(a)$ （应用：如求极限时取 ln，利用 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续的性质）

复合函数的连续性定理.

设函数 $g$ 在点 $x_0$ 处连续，函数 $f$ 在点 $g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $f\circ g$ 在点 $x_0$ 处连续

对于不同的 $\alpha$，幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域可作适当补充

(1) $\alpha=n\in Z^+$ $\quad y=x^n,\quad x\in\mathbb{R}$

(2) $\alpha=-n\in Z^+$ $\quad y=x^{-n}\quad x\in\mathbb{R}/\{0\}$

(3) $\alpha=\frac{q}{p}>0$ ($p.q$ 互素且 $p>0$) $\begin{cases} p\text{奇} & x\in\mathbb{R} \\ p\text{偶} & x\in[0,+\infty) \end{cases}$

......

初等函数在其定义域上连续

**不连续点的类型**

定义：设函数 $f$ 在 $x_0$ 的某个空心邻域内有定义，若 $f$ 在点 $x_0$ 处没有定义，或 $f$ 在点 $x_0$ 处有定义但不连续，则称 $x_0$ 是 $f$ 的不连续点或间断点.

此时，也称 $f$ 在点 $x_0$ 处间断或不连续

类型：

(1) **可去间断点**：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，并且 $f$ 在 $x_0$ 处没有定义，或有定义但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

(2) **跳跃间断点**：$f$ 在点 $x_0$ 处的左右极限存在但不相同

(3) **第二类间断点**：$f$ 在点 $x_0$ 处左右极限至少有一个不存在

例：设Riemann函数，R(x)定义如下：

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\ (p\in\mathbb{Z}^+, q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\text{且}p,q\text{互素})\\ 1, & x=0\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

证明：对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$

从而 $x\in\mathbb{Q}$，$x_0$是可去间断点

$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，$x_0$是R(x)的连续点

分析：R(x)是周期为1的函数，从而只需讨论R[x]在[0,1]的性质

任取 $x_0\in[0,1]$

$\forall\ 0<\varepsilon<1$，满足 $\frac{1}{p}\geq\varepsilon$ 的p只有有限个.

于是[0,1]中满足 $R(\frac{q}{p})\geq\varepsilon$ 只有有限个（至少有2个）

记这些有理数为 $r_1\cdots\cdots r_n$

令 $\delta=\min\{|r_i-x_0|\ |\ i=1,2\cdots n, \text{且}\ r_i\neq x_0\}$

则 $\delta>0$，

当 $x\in[0,1]$ 且 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

(1)若 $x\in\mathbb{Q}$，则 $x\notin\{r_i|\ 1\leq i\leq n\}$，从而 $R(x)<\varepsilon$

(2)若 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，则 $R(x)=0$

又由R(x)的定义可知 $x\in(0,1)$，都有 $R(x)\geq0$

从而当 $x\in[0,1]$ 且 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|R(x)|<\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$

例：区间(a,b)上的单调函数的不连续点必是跳跃间断点

分析：不妨设f在(a,b)上单增.

$\forall x_0\in(a,b)$

$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\inf\{f(x):\ x_0<x<b\}$

$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\sup\{f(x):\ a<x<x_0\}$（记作α）（非空有上界集合存在上确界）

$\forall\varepsilon>0$，由上确界定义，$\exists\ a<x^*<x_0$，使. $\alpha-\varepsilon<f(x^*)$

令 $\delta=x_0-x^*$，则 $\delta>0$

$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)=(x^*,x_0)$

由$f$在$(a,b)$上单增，有

$f(x) \geq f(x^*) > \alpha - \varepsilon$

又由上确界的定义，此时有 $f(x) \leq \alpha$

从而此时 有 $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

注意函数极限的定义

$\forall \varepsilon, \exists \delta$，使 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

先证明左、右极限必存在

从而 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$ $(\leq f(x_0))$

同理 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ $(\geq f(x_0))$.

为可去/跳跃.

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+) \Rightarrow$ 则有 $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

从而命题成立!

# 3.3无穷小量与无穷大量的阶

2023年10月26日 星期四　14:19

定义：设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是一个无穷小量.

定义：设当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$ 与 $v(x)$ 都是无穷小量.

(1) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，

$u(x)$ 是 $v(x)$ 的高阶无穷小量. 也称 $v(x)$ 是 $u(x)$ 的低阶无穷小量.

记作 $u(x)=o(v(x))\ (x\to x_0)$

(2) 如果 $\exists\delta>0$，及 $a, A>0$，使 $\forall x\in U^{\circ}(x_0,\delta)$，有 $a<\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|<A$ ③

注意"O"与"o"的含义

则称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 为同阶无穷小量.

若把③换成 $\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|<A$，此时记作，

$u(x)=O(v(x))$

(3) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$，则称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷小量.

记作 $u(x)\sim v(x)\ (x\to x_0)$

注：$u(x)=o(v(x))\ (x\to x_0)$ 只针对无穷小量. 不针对无穷大量

$\sim$. $O$ 都适用

注：设当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$ 与 $v(x)$ 都是无穷小量，则 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是同阶无穷小量，$\Rightarrow u(x)=O(v(x))$

$\not\Leftarrow$

特别地，$u(x)=o(v(x))\ (x\to x_0)$

$\Rightarrow u(x)=O(v(x))\ (x\to x_0)$.

注：$u(x)=o(v(x))$

$u(x)=O(v(x))$ 与通常的等式含义不同，

此时，等式左边：函数

右边：函数类

等号：属于

注：并不是任意两个无穷小量都能比较它们趋于0的快慢.

例：设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是一个无穷小量

证：$o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$

注：无穷小量乘以有界量必定是无穷小量.

无穷小量除以有界量不一定是无穷小量.

用 $u(x)=o(1)\ (x\to x_0)$ 表示当 $x\to x_0$，$u(x)$ 是一个无穷小量.

用 $u(x)=O(1)\ (x\to x_0)$ 表示当 $x\to x_0$，$u(x)$ 是一个有界量.

定理：设当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷小(大)量，则以下结论成立

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot w(x)=A$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\cdot w(x)=A$

必只有乘除!!!

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{w(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{v(x)}{w(x)}=A$

例：$x\sim\sin x$

$\arcsin x\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

重要的无穷小量

(1) $\sin x\sim x\ (x\to 0)$　(2) $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$

(3) $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$　(4) 当 $\alpha\neq 0$ 时，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

注：若当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷小量.

则 $u(x)=v(x)+o(v(x))\quad(x\to x_0)$

换等价无穷小时，注意要把 $o(x)$ 代入

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(e^{\frac{x}{3}}-1)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}x+o(x))-(\frac{x}{3}+o(x))}{2x}=\frac{1}{12}$$

$(\ln y)^k$ 是 $x$ 的低阶无穷大量.

# 3.4 闭区间上的连续函数

2023年10月24日 星期二 12:25

## 闭区间上连续函数的性质

在这一部分，总假定 $f$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.(*)

定理1：设条件(*)成立，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界.（有界定理）

证：取 $\varepsilon_0=1$

无穷

$\forall x\in[a,b]$，由 $f$ 在点 $x$ 连续，$\exists\delta_x>0$，使 把一段 $f(x)$ 用一个 $f(x_0)$ 控制，

当 $x'\in O(x,\delta_x)\cap[a,b]$，有 $|f(x')-f(x)|<1 \Rightarrow |f(x')|<|f(x)|+1$

由于 $H=\{O(x,\delta_x): x\in[a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的开覆盖，

由有限覆盖定理，存在 $H$ 的一个有限子族

有限

$H^*=\{O(x_i,\delta_{x_i})\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 覆盖

令 $M=\max\{|f(x_i)|+1 \mid i=1,2\cdots n\}$

则 $\exists\ 1\le i\le n$，使 $x\in O(x_i,\delta_{x_i})$ 从而

$|f(x)|\le|f(x_i)|+1$

定理2：设条件(*)成立，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大值和最小值（最值定理）

证明：由定理1，$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 存在上确界，记作 $\beta$

假设 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x_0)<\beta$，则 $g(x)=\dfrac{1}{\beta-f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上连续

于是由定理1：$\exists M>0$，使 $g(x)<M$，$\forall x\in[a,b]$

又由 $\beta=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$，可得 $g(x)>0$，$\forall x\in[a,b]$

所以 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\beta-f(x)>\frac{1}{M}\Rightarrow f(x)<\beta-\frac{1}{M}$$

这与 $\beta$ 为上确界矛盾，从而假设错误

连续函数

定理3：设条件(*)成立，且 $f(a)f(b)<0$ $(\le 0)$

零点存在定理 则 $\exists\ c\in(a,b)$ $[a,b]$，使 $f(c)=0$

法1：二分法

分析：不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$

若 $\exists n$，使 $f(\frac{a_n+b_n}{2})=0$，则令 $c=\frac{a_n+b_n}{2}$

若 $\forall n\ge1$，有 $f(\frac{a_n+b_n}{2})\ne0$，

则可找到一个闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$，

满足：(1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$

(2) $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$

(3) $a_n<0$ $b_n>0$.

由(1)(2) $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个闭区间套

从而 $\exists c\in\mathbb{R}$，使 $c\in[a_n,b_n]$，$\forall n\ge1$

特别地，有 $c\in[a_1,b_1]=[a,b]$

从而 $f$ 在点 $c$ 连续

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ 有：

$f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le0$ $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge0$

故 $f(c)=0$

法2：令 $E=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}$，则 $a\in E$，且 $E\subset[a,b]$，从而 $E$ 非空有界，

从而 $E$ 有上确界. 令 $c=\sup E$

例：设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是连续函数

则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\xi$

证：令 $g(x)=f(x)-x$，$x\in[a,b]$

则 $g(a)=f(a)-a\ge0$ $g(b)=f(b)-b\le0$

若 $g(a)=0$ ( $g(b)=0$ ) 取 $\xi=a(b)$

然后由定理3，知 $\exists\xi\in[a,b]$ 有 $f(\xi)=\xi$

定理4（介质性定理）：设条件(*)成立，且 $f(a)\ne f(b)$，

则对任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的实数 $\mu$ 必存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$f(\xi)=\mu$.

证：令 $g(x)=f(x)-\mu$，$x\in[a,b]$

则 $g(a)\cdot g(b)=(f(a)-\mu)\cdot(f(b)-\mu)<0$

从而由定理3，$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $g(\xi)=0$，从而 $g(\xi)=\mu$

定理5：设条件(*)成立，设 $m=\min\{f(x): x\in[a,b]\}$

$M=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$

则 $\{f(x): x\in[a,b]\}=[m,M]$

令 $x_1,x_2\in[a,b]$ 满足 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，由定义知 $f([a,b])\subset[m,M]$

若 $m=M$，则定理必成立

若 $m<M$，则 $\forall\mu\in(m,M)$ 有 $f(x_1)<\mu<f(x_2)$

若 $x_1>x_2$，则由介质性定理，$\exists\xi\in(x_2,x_1)$，使 $f(\xi)=\mu$

## 一致连续

定义：设 $f$ 是定义在区间 $I$ 上的函数，如果

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $\forall x',x''\in I$. 只要 $|x'-x''|<\delta$，

就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，称 $f$ 在区间 $I$ 上一致连续

性质 $f$ 在 $I$ 上一致连续 $\Longrightarrow$ $f$ 在 $I$ 上连续.

$f$ 在 $I$ 上不一致连续：$\exists\varepsilon_0$，$\forall\delta$，使 $\exists x',x''\in I$，有 $|x'-x''|<\delta$，

$|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$

下证：$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续

证：取 $\varepsilon_0=1$，$\forall\delta>0$，$|f(x')-f(x'')|=|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}|$

令 $x'=\min\{\delta,\frac{1}{2}\}$，$x''=\frac{x'}{2}$ $\underline{\underline{x''=\frac{x'}{2}}}$ $\frac{1}{x'}\ge1$

$|x'-x''|=\frac{x'}{2}<\delta$

例：$f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

$\forall x',x''\in\mathbb{R}$，有 $|f(x')-f(x'')|=|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''|$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，$\cdots$

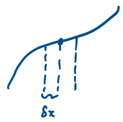
定理（Cantor定理）

闭区间上的连续函数必定一致连续

证：设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数

$\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in[a,b]$，由 $f$ 在点 $x$ 连续.

$\exists\delta_x>0$，使 $x'\in O(x,\delta_x)\cap[a,b]$，有 $|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$




令 $H=\{O(x,\frac{\delta_x}{2})\mid x\in[a,b]\}$

则 $H$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，从而由有限覆盖定理.

存在 $H$ 的一个有限子族

$H^*=\{O(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2}), i=1,2,\cdots n\}$ 覆盖 $[a,b]$

令 $\delta=\min\{\frac{\delta_{x_i}}{2}\ 1\le i\le n\}$，则 $\delta>0$

$\forall x',x''\in[a,b]$，且 $|x'-x''|<\delta$

由 $H^*$ 覆盖 $[a,b]$，所以 $\exists\ 1\le i\le n$，使 $x'\in O(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2})$

从而 $|x''-x_i|\le|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_{x_i}}{2}<\delta_{x_i}$

故 $x',x''$ 均落在 $O(x_i,\delta_{x_i})$ 中

从而 $|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x'')|$

$\le\varepsilon$.

反证法：假设 $f$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续

则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x',x''\in[a,b]$

使 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$ (2)

取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$

存在 $x_n',x_n''\in[a,b]$，$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0$

由致密性定理，$\{x_n'\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$

记其极限为 $\xi$，则 $\xi\in[a,b]$

$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=\lim\limits_{k\to\infty}((x_{n_k}''-x_{n_k}')+x_{n_k}')=0+\xi=\xi$ $\to\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=f(\xi)\\ \lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')=f(\xi)\end{cases}$

由 $f$ 在 $\xi$ 处连续，有 $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}''))$

$=\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}')-f(\xi))+(f(\xi)-f(x_{n_k}''))$ Heine

$=0+0=0$

与(2)式矛盾！

定理：设条件(*)成立，则 $f$ 在 $I$ 上一致连续

$\Longleftrightarrow$ 对区间 $I$ 上的任意两个点列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$

只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

证明：设 $f$ 在 $I$ 上一致连续

$(\Rightarrow)$ 任取包含于 $I$ 的两个点列 $\{x_n'\}$ 与 $\{x_n''\}$，并且设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ (1)

$\forall\varepsilon>0$. 由 $f$ 在 $I$ 上一致连续，$\exists\delta>0$，使 $\forall x',x''\in I$. 只要 $|x'-x''|<\delta$，

就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立，由(1)，对上述取定的 $\delta$，$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，当 $n>N$ 时，

有 $|x_n'-x_n''|<\delta$，从而 $|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$ 提 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

$(\Leftarrow)$ 用反证法：假设 $f$ 在 $I$ 上不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x',x''\in I$，

使 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$.

令 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2\cdots$，则 $\exists x_n',x_n''\in I$，$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$

若 $m=M$，则定理必成立

若 $m<M$，则 $\forall \mu \in (m,M)$ 有 $f(x_1)<\mu<f(x_2)$

若 $x_1>x_2$，则由介质性定理，$\exists\ \xi\in(x_2,x_1)$，使 $f(\xi)=\mu$

若 $x_1<x_2$，则由介质性定理，$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)=\mu$

综上，必 $\exists\ \xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\mu$

从而 $[m,M]\subset f([a,b])$

结合 (1)，可知 $f([a,b])=[m,M]$ .

使 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$

令 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2\cdots$，则 $\exists\ x_n', x_n''\in I$，$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，但 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$。

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$

但是当 $n\to\infty$ 时，$f(x_n')-f(x_n'')\not\to 0$ 从而矛盾，因此 $f$ 在 $I$ 上一致连续

说明函数不一致连续 $\Rightarrow$ 取两列等价，使函数不等价

定理：设 $f$ 是有限开区间 $(a,b)$ 上的连续函数，则 $f$ 在 $(a,b)$ 一致连续

$\Leftrightarrow f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 都存在

"$x$ 有极限 $f(x)$ 就有极限"

证：($\Leftarrow$) 令 $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$

则 $\tilde{f}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且一致连续

从而 $\tilde{f}$ 在 $(a,b)$ 上一致连续

又 $f(x)=\tilde{f}(x)$，$x\in(a,b)$

所以 $f$ 在 $(a,b)$ 上一致连续

归结原则（证明函数极限的存在）

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 任意以 $x_0$ 为极限的序列 $\{x_n\}$ 的 $\{f(x_n)\}$ 收敛

($\Rightarrow$) 只要证：任意含于 $(a,b)$ 且以 $a$ 为极限的点列 $\{x_n\}$

都有 $\{f(x_n)\}$ 收敛（归结原则）

$\forall\varepsilon>0$，由 $f$ 在 $(a,b)$ 上一致连续，$\exists\ \delta>0$，$\forall x', x''\in(a,b)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，

就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

由 $\{x_n\}$ 收敛，从而是柯西数列. 因此对上述给定的 $\delta>0$，

$\exists N\in\mathbb{Z}^+$，当 $n,m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\delta$，从而 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$，所以

$\{f(x_n)\}$ 是柯西数列，从而收敛